

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO
Primo esonero - 20 Novembre 2014 -

Traccia 1. [Punti: 1.a: 3; 1.b: 3; 1.c: 3; 1.d: 3]

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^3 - 1, \quad x \in [0, 2],$$

che, evidentemente, ammette l'unico zero $\alpha = 1$ nell'intervallo indicato. Per l'approssimazione di α si consideri il metodo one-step definito dalla seguente funzione iteratrice:

$$\Phi_c(x) = x - f(x) \frac{x - c}{f(x) - f(c)},$$

dove c è un parametro reale.¹ Risolvere i seguenti quesiti, motivando le risposte.

- (1.a) Si fissi $c = 0$. Dire se il metodo converge localmente a α .
- (1.b) Si fissi $c = 2$. Dire se il metodo converge localmente a α .
- (1.c) Determinare gli eventuali valori di c che rendono la convergenza quadratica.
- (1.d) Si fissi ancora $c = 2$. Dire se il metodo risulta globalmente convergente nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Traccia 2. [Punti: 2.a: 2; 2.b: 2; 2.c: 2; 2.d: 2; 2.e: 2; 2.f: 2]

Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F}_{(2,3,-3,5)}$ in base $\beta = 2$ con 4 cifre significative e range per l'esponente $p \in (-3, 5)$. Supponiamo che la relativa aritmetica di macchina sia quella definita dall'arrotondamento (sia per la rappresentazione che per le operazioni elementari). Discutere i seguenti quesiti.

- (2.a) Determinare la precisione di macchina u , il più piccolo e il più grande numero di macchina positivi ω e Ω .
- (2.b) Determinare la più grande distanza tra due numeri di macchina consecutivi.
- (2.c) Determinare l'intervallo S dei numeri reali che vengono rappresentati mediante il numero di macchina Ω :

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid fl(x) = \Omega\}.$$

Scrivere gli estremi di questo intervallo nella forma $\Omega - r_1$ e $\Omega + r_2$.

- (2.d) Dire, motivando le risposte, qual è, in \mathbb{F} , il risultato delle seguenti espressioni:

$$\Omega + (1 - 2^{-4}), \quad \Omega + (1 - 2^{-5}).$$

- (2.e) Dire, motivando la risposta, qual è il più grande intero positivo k rappresentabile in \mathbb{F} , tale che ogni altro intero positivo minore di k sia anche rappresentato correttamente.

¹Questo metodo è noto in letteratura come metodo della *falsa posizione* o *regala falsi*.

(2.f) Qual è la più piccola distanza tra due numeri di macchina consecutivi in assenza e in presenza dei numeri non normalizzati?

Traccia 3. (Scilab/Matlab) [Punti 8]

Frazioni continue. una frazione continua è un'espressione della forma

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}} \quad (1)$$

con a_0 intero non negativo e a_i , $i = 1, \dots$, interi positivi. La successione $\{a_i\}$ può essere finita o infinita. Una forma abbreviata per denotare una frazione continua è la seguente:

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots]. \quad (2)$$

Ogni numero razionale può esprimersi mediante una frazione continua finita, ad esempio:

$$3.245 = [3; 4, 12, 4],$$

mentre una frazione continua infinita genera un irrazionale.²

Esercizio. Scrivere una funzione Matlab che abbia in input un vettore x che individua una frazione continua secondo la notazione (??) e che restituisca in output il valore della frazione continua calcolato mediante l'espressione (??).

²Curiosità: si può dimostrare che la frazione continua infinita di elementi $a_i = 1$ converge alla sezione aurea $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO
Primo esonero - 21 Novembre 2013 -

Traccia 1. [Punti: 1.a: 2; 1.b: 2; 1.c: 2; 1.d: 2; 1.e: 2]

Si considerino l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F}_{(2,4,-6,5)}$ in base $\beta = 2$, cinque cifre significative ($t = 4$), range per l'esponente $p \in (-6, 5)$, e la corrispondente aritmetica floating-point ottenuta con tecnica dell'arrotondamento. Risolvere i seguenti quesiti.

(1.a) Determinare il più piccolo numero di macchina positivo ω , il più grande numero di macchina positivo Ω e la precisione di macchina u .

(1.b) Calcolare, in \mathbb{F} , il risultato delle seguenti operazioni:

$$\omega + 1, \quad \Omega + \frac{1}{2}, \quad u\Omega + \frac{1}{2}.$$

(1.c) Siano $x, y \in \mathbb{F}$, x, y consecutivi. Si consideri la distanza tra x e y : $d = |x - y|$. Qual è il più piccolo e più grande valore che d può assumere?

(1.d) Supponendo che $fl(x) = 0, \forall |x| < \omega$ (assenza di numeri denormali), provare, riportando un opportuno controesempio, che in questa aritmetica di macchina non è verificata la seguente proprietà valida in \mathbb{R} :

$$x - y = 0 \implies x = y. \tag{1}$$

(1.e) Rispondere al quesito precedente, considerando la presenza dei numeri non normalizzati.

Traccia 2. [Punti: 2.a: 2; 2.b: 2; 2.c: 2; 2.d: 2]

Si consideri l'equazione di terzo grado

$$x^3 + x - 2 = 0$$

che ammette, in \mathbb{R} l'unica radice $\alpha = 1$. Per la sua approssimazione, si considerino le seguenti funzioni iteratrici

$$\Phi_1(x) = (2 - x)^{\frac{1}{3}}, \quad \Phi_2(x) = \frac{1}{3}(x + 4 - 2x^3),$$

che, evidentemente, ammettono $\alpha = 1$ quale punto fisso. Siano $x_n = \Phi_1(x_{n-1})$ e $y_n = \Phi_2(y_{n-1})$ le successioni generate dai due metodi a partire da un punto iniziale $x_0 = y_0$. Risolvere i seguenti quesiti.

(2.a) Studiare la convergenza locale alla radice α dei due metodi.

(2.b) Studiare la convergenza globale dei due metodi nell'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$.

(2.c) Dire, motivando la risposta, se il metodo definito dalla funzione iteratrice $\Phi(x) = \Phi_1(\Phi_2(x))$, ottenuto come composizione dei due metodi di partenza, risulta localmente convergente ad α .

(2.d) Siano Φ_1 e Φ_2 due generiche funzioni iteratrici che ammettono uno stesso punto fisso α . Siano p_1 e p_2 i corrispondenti ordini di convergenza. Determinare l'ordine del metodo composto $\Phi(x) = \Phi_1(\Phi_2(x))$ e la relativa costante asintotica di convergenza.

Traccia 3. [Punti 7]

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinarne la fattorizzazione LU e, conseguentemente, calcolarne il determinante.

Traccia 4. (Scilab/Matlab) [Punti: 4.a: 4; 4.b: 3; 4.c: 2]

- (4.a) Scrivere una funzione Scilab/Matlab che implementi l'algoritmo di fattorizzazione LU : la function dovrà avere in input una matrice quadrata A e, in output, le due matrici L e U della fattorizzazione LU . Nel caso A non sia fattorizzabile in forma LU , la function dovrà stampare un messaggio di errore e terminare così l'esecuzione.
- (4.b) Una matrice A è detta in forma di Hessenberg superiore se tutti i suoi elementi al di sotto della sottodiagonale sono nulli: $a_{ij} = 0 \forall i > j + 1$. Un esempio di matrice di Hessenberg superiore è la matrice A della traccia precedente. Si semplifichi l'algoritmo di fattorizzazione LU precedentemente scritto, per questa classe di matrici. (Suggerimento: ragionare sull'esercizio della Traccia 3 per comprendere i termini della semplificazione.)
- (4.c) Qual è il costo computazione dell'algoritmo semplificato?

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO
Primo esonero - 04 Aprile 2013 -

Traccia 1. [Punti: 1.a: 1; 1.b: 3; 1.c: 2; 1.d: 1; 1.e: 1; 1.f: 2]

Si considerino l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F}_{(10,3,-4,5)}$ in base $\beta = 10$, quattro cifre significative, range per l'esponente $p \in (-4, 5)$, e la corrispondente aritmetica floating-point ottenuta con tecnica dell'arrotondamento. Risolvere i seguenti quesiti.

- (1.a) Determinare il più piccolo numero di macchina positivo ω , il più grande numero di macchina positivo Ω e la precisione di macchina u .
- (1.b) Dati i numeri reali $x_1 = 1.23351 \cdot 10^1$ e $x_2 = 6.55047 \cdot 10^{-1}$, determinare, in \mathbb{F} , la somma $x_1 + x_2$ e la differenza $x_1 - x_2$.
- (1.c) Denotati con s (somma) e d (differenza) i numeri di macchina ottenuti come risultati delle due operazioni al punto precedente, calcolare, in \mathbb{F} , $x_3 = \frac{s-d}{2}$. Ricavare quindi l'errore relativo $E = \frac{|x_3 - x_2|}{x_2}$ e dire se risulta più grande o più piccolo della precisione di macchina.
- (1.e) Determinare il più piccolo numero di macchina positivo x_4 tale che $\Omega + x_4$ causi overflow.
- (1.f) Determinare il più grande numero di macchina positivo x_5 tale che $\Omega + x_5 = \Omega$.

Traccia 2. [Punti: 2.a: 2; 2.b: 2; 2.c: 2; 2.d: 2]

Si consideri l'equazione di secondo grado

$$x^2 - (m - 1)x - m = 0 \tag{1}$$

dove m è un parametro reale maggiore di 1: $m > 1$. Essa ammette sempre la radice $\alpha = -1$. Si consideri la funzione iteratrice

$$\Phi(x) = \frac{x^2 - m}{m - 1},$$

che si ottiene risolvendo la (2) rispetto a x . Sia $x_n = \Phi(x_{n-1})$ la successione generata dal metodo a partire da un punto iniziale x_0 . Risolvere i seguenti quesiti.

- (2.a) Per quali valori del parametro m , il metodo associato a Φ risulta localmente convergente ad α ?
- (2.b) Esistono valori di m che rendono la convergenza quadratica?
- (2.c) Si fissi $m = 5$. Provare che per ogni $x_0 \in [-2, 0]$ risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$.
- (2.d) Determinare i valori di m in corrispondenza dei quali il metodo risulta globalmente convergente nell'intervallo $[-2, 0]$.

Traccia 3. [Punti 7]

Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza globale del metodo di Newton.

Traccia 4. (Scilab) [Punti 7]

Per l'approssimazione di π si consideri la seguente formula (*Formula di Leibniz*):

$$4 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right) = \pi \quad (2)$$

Esercizio. Scrivere una funzione Scilab che abbia:

- INPUT: una tolleranza tol , un valore massimo di iterate consentite $itmax$.
- OUTPUT: Un intero n che rappresenta il numero minimo di termini da considerare nella formula per raggiungere un'approssimazione di π con errore assoluto non superiore a tol ;¹

Ripetere l'esercizio considerando, in luogo della (2), la seguente formula (*di Viète*):

$$2 \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \dots = \pi$$

In tal caso il parametro di output n rappresenta il numero minimo di fattori da considerare nella seconda formula per ottenere un'approssimazione di π con errore assoluto minore di tol .

¹Il valore π in Scilab si ottiene mediante la costante permanente `%pi`.

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO
Primo esonero - 11 Aprile 2012 -

Traccia 1. [Punti: 1.a: 1; 1.b: 1; 1.c: 2; 1.d: 2; 1.e: 1; 1.f: 2]

Si considerino l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F}_{(10,3,-3,4)}$ in base $\beta = 10$, quattro cifre significative, e range per l'esponente $(-3, 4)$, e la corrispondente aritmetica floating-point ottenuta con tecnica dell'arrotondamento. Dati i numeri reali $x = 3.2415$, $y = 1.0805$, risolvere i seguenti quesiti.

- (1.a) Calcolare, in \mathbb{F} , il risultato dell'operazione $x + y$, determinandone l'errore totale.
- (1.b) Calcolare, in \mathbb{F} , il risultato dell'operazione $x * y$, determinandone l'errore inerente e l'errore algoritmico.
- (1.c) Calcolare, in \mathbb{F} , il risultato dell'operazione $x - y$ e dire, motivando la risposta, se si ha cancellazione numerica.
- (1.d) Calcolare, in \mathbb{F} , il risultato dell'operazione $x - 3 * y$ e dire, motivando la risposta, se si ha cancellazione numerica.
- (1.e) Determinare, in \mathbb{F} , il risultato delle seguenti espressioni: $realmax + 10 * realmin$, $realmax + 50 * realmin$.
- (1.f) Determinare, in \mathbb{F} , il risultato della seguente espressione: $(\sqrt[4]{realmax})^4$.

Traccia 2. [Punti: 2.a: 1; 2.b: 2; 2.c: 1; 2.d: 2; 2.e: 3]

Si consideri la funzione

$$\Phi(x) = \frac{1 + a}{x^2 + a}$$

dove a è un parametro reale, $a \neq -1$. A partire da un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si consideri la successione definita ricorsivamente da $x_n = \Phi(x_{n-1})$.

- (2.a) Verificare che $\alpha = 1$ è punto fisso di Φ , indipendentemente dalla scelta del parametro a .
- (2.b) Per quali valori del parametro a , il metodo associato a Φ risulta localmente convergente ad α ?
- (2.c) Esistono valori di a che rendono la convergenza quadratica?
- (2.d) Si fissi $a = 3$. Provare che per ogni $x_0 \in [0, 2]$ risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$.
- (2.e) Si fissi $a = 3$. Determinare il più grande intervallo di convergenza ad α .

Traccia 3. [Punti 5]

Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di convergenza di un metodo iterativo.

Traccia 4. (Scilab/Matab) [Punti 7]

Sia x_0 un numero intero positivo. Per $n = 0, 1, 2, \dots$, si consideri la successione $\{x_n\}$ definita ricorsivamente come segue:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2}, & \text{se } x_n \text{ è pari,} \\ 3x_n + 1, & \text{se } x_n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La congettura di Collatz¹ afferma che qualsiasi sia il punto iniziale x_0 , l'algoritmo raggiunge sempre il valore 1 dopo un numero finito di passi, ovvero:

$$\forall x_0 \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x_n = 1.$$

Esercizio. Si scriva una funzione Matlab che abbia in input un numero intero positivo x_0 e restituisca in output:

- il più piccolo intero n tale che $x_n = 1$;
- un vettore x che contenga l'intera sequenza di valori x_0, x_1, \dots, x_n .

Suggerimento. Per stabilire se un numero è pari o dispari, può essere utile la function *mod*. Se x e y sono due numeri interi positivi, $\text{mod}(x, y)$ restituisce il resto della divisione tra x e y . Dunque se $\text{mod}(x, 2)$ è uguale a 0, x è pari, mentre se è uguale a 1, allora x è dispari.

¹http://it.wikipedia.org/wiki/Congettura_di_Collatz. La congettura è stata verificata sul computer per tutti i valori fino a $20 \cdot 2^{58} \simeq 5.7 \cdot 10^{18}$. Nonostante non sia stata provata, la maggioranza dei matematici che se ne sono occupati pensa che la congettura sia vera.

**CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO**

Primo esonero - 28 Aprile 2011 -

Traccia 1. [Punteggio: 1.a:2, 1.b:2, 1.c:2, 1.d:2, 1.e:2, 1.f:2]

Si consideri l'aritmetica floating point definita, mediante arrotondamento, sull'insieme \mathbb{F} dei numeri di macchina in base $\beta = 10$, con 3 cifre significative ($t = 2$) e range per l'esponente $(-3, 4)$. Risolvere i seguenti quesiti.

- 1.a Siano $x = 2.7551$ e $y = 2.7549$. Calcolare, in \mathbb{F} , la media aritmetica di x e y e dire se coincide con x , con y o con nessuno dei due.
- 1.b Determinare l'errore inerente e l'errore totale dell'operazione $x * y$. Quanto vale l'errore algoritmico?
- 1.c Calcolare l'errore inerente e l'errore totale dell'operazione $x + y$. Quanto vale l'errore algoritmico?
- 1.d Dire, motivando la risposta, a quale tra le due operazioni $x/3$ e $y/3$ corrisponde un errore algoritmico non nullo.
- 1.e Dire, motivando la risposta, se l'operazione $x - y$ produce cancellazione numerica.
- 1.f Dire, motivando la risposta, qual è il minimo valore intero da attribuire a q affinché $\text{realmin} * 10^q + \text{realmax}$ produca overflow.

Traccia 2. [Punteggio: 7]

Enunciare il teorema di convergenza globale del metodo di Newton per la ricerca degli zeri di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e dimostrarlo nelle seguenti ipotesi: $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$.

Traccia 3. [Punteggio: 3.a:4, 3.b:3]

Sia α uno zero doppio di $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- 3.a Provare che, in tal caso, il metodo di Newton produce una successione che converge ad α linearmente anziché quadraticamente.
- 3.b Si consideri la seguente variante del metodo di Newton, definita dalla funzione iteratrice

$$\Phi(x) = x - 2 \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Dimostrare che la successione generata converge quadraticamente ad α .

Suggerimento: per svolgere entrambi i punti è possibile utilizzare la regola di de l'Hôpital oppure lo sviluppo di Taylor di f in un intorno di α .

Traccia 4. [Punteggio: 7]

Si scriva una funzione Scilab che abbia

- in input un vettore x le cui componenti siano interi compresi tra 0 e 9;
- in output una matrice A di due colonne così definita:
 - la prima colonna di A riporta le cifre distinte del vettore x
 - il generico elemento della seconda colonna di A riporta il numero di volte in cui la cifra corrispondente nella prima colonna compare nel vettore x

ESEMPIO:

$$x = (6, 4, 0, 6, 8, 0, 0) \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \\ 6 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

**CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO**

Primo esonero - 26 Aprile 2010 -

Traccia 1. [Punteggio: 1.a:1, 1.b:2, 1.c:2, 1.d:2, 1.e:3]

Si consideri la funzione

$$f(x) = px^2 + 2(1-p)x + p - 2,$$

dove $p \in (0, 1)$ è un parametro. Per l'approssimazione delle due radici si considera il metodo definito dalla funzione iteratrice ottenuta risolvendo, rispetto ad x l'equazione $f(x) = 0$, ovvero:

$$\Phi(x) = \frac{p}{2(p-1)}x^2 + \frac{p-2}{2(p-1)}. \quad (1)$$

1.a Verificare che i due zeri di f sono:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{p-2}{p}.$$

1.b Si fissi $p = \frac{1}{4}$. Studiare la convergenza locale del metodo definito dalla (1) alla radice x_1 e alla radice x_2 .

1.c Determinare i valori del parametro $p \in (0, 1)$, in corrispondenza dei quali il metodo definito dalla (1) risulta localmente convergente alla radice x_1 .

1.d Ripetere i calcoli del punto precedente per la radice x_2 .

1.e Si fissi $p = \frac{1}{4}$. Studiare la convergenza globale del metodo definito dalla (1) alla radice x_1 , nell'intervallo $[0, 2]$.

Traccia 2. [Punteggio: 2.a:6, 2.b:2]

2.a Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza globale del metodo di Newton-Raphson per la ricerca degli zeri di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

2.b Nelle ipotesi del teorema di cui sopra, si supponga ora di scegliere $x_0 \in [a, b]$. Dimostrare che se $x_1 \in [a, b]$, allora la tesi del teorema continua a sussistere. (Suggerimento: aiutarsi con un grafico esplicativo).

Traccia 3. [Punteggio: 3.a:5, 3b:2, 3c:2]

Premessa. Ricordiamo che la formula risolutiva di un'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2)$$

è

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad (3)$$

dove $\Delta = b^2 - 4ac$ è il discriminante. In alternativa, se b è pari è anche possibile usare la formula ridotta

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}. \quad (4)$$

Si consideri l'aritmetica di macchina definita dall'insieme \mathbb{F} dei numeri reali, in base 10, con 3 cifre significative ed esponente $p \in (-5, 4)$.

- 3.a Si fissi $a = 15$, $b = 32$, $c = 17$. Risolvere in \mathbb{F} l'equazione (2) mediante le due formule (3) e (4), calcolando gli errori relativi delle due radici ottenute, in entrambi i casi. Commentare brevemente i risultati.
- 3.b Sia *realmin* il più piccolo numero di macchina positivo. È possibile selezionare dei valori in \mathbb{F} per i coefficienti a , b e c tali che *realmin* sia soluzione di (2)?
- 3.c Sia *realmax* il più grande numero di macchina positivo. È possibile selezionare dei valori in \mathbb{F} per i coefficienti a , b e c tali che *realmax* sia soluzione di (2)?

Traccia 5. [Punteggio: 7]

Scrivere una function Scilab (Matlab) che abbia in input una matrice quadrata A e in output la matrice B inversa di A . Per il calcolo dell'inversa si faccia riferimento alla formula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{agg}(A)$$

dove $\text{agg}(A)$ denota la matrice aggiunta di A . Laddove necessario, è consentito utilizzare la function predefinita "det" di Scilab per il calcolo dei determinanti.

**CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO**

Primo esonero - 10 Dicembre 2008 -

Traccia 1. [Punteggio: 1.a:2, 1.b:1, 1.c:2, 1.d:2]

Si consideri la matrice tridiagonale:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Una matrice è detta tridiagonale se gli unici elementi eventualmente non nulli sono quelli che appartengono alla diagonale principale, alla sopradiagonale ed alla sottodiagonale). Si discutano i seguenti punti.

- 1.a Si costruisca la fattorizzazione LU della matrice A .
- 1.b Si sfrutti il risultato ottenuto, per calcolare il determinante di A .
- 1.c Risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 0, 0, 0, 1]^T$.
- 1.d Calcolare il costo computazionale (numero di operazioni elementari) per fattorizzare in forma LU una generica matrice tridiagonale di dimensione n .

Traccia 2. [Punteggio: 2.a:1.5, 2.b:1.5, 2.c:1, 2.d:1, 2.e:1, 2.f:1]

Sia dato l'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F}(2, 4, -5, 3)$ e sia $\text{fl}(x) = \text{arr}(x)$. Si determini

- 2.a il più grande numero macchina positivo, il più piccolo numero macchina positivo e la precisione di macchina;
- 2.b l'insieme dei numeri reali tali che $\text{fl}(x) = 1$;
- 2.c l'insieme dei numeri reali tali che $\text{fl}(x) = 1 + 2^{-4}$;
- 2.d la distanza tra $1/8$ e il numero di macchina successivo.
- 2.e Sia $x \in \mathbb{R}$, $x = (2 + 1/16)$. Si dica a che valore è uguale $\text{fl}(x)$.
- 2.f Dare almeno un esempio di due numeri di macchina la cui somma non sia un numero di macchina.

Traccia 3. [Punteggio: 7]

Data la seguente schermata sul command Window del Matlab (Scilab)

```
>>0.7/0.1==3.5/0.5          -->0.7/0.1==3.5/0.5
ans =                        IN SCILAB:  ans =
    0                          F
```

si spieghi il risultato ottenuto. Quale delle due frazioni fornisce il risultato esatto e perché?

Traccia 4. [Punteggio: 7]

Calcolare il numero di condizionamento μ_f di $f(x) = x^2 + 3 * x$. Sia $x \gg 0$ e si supponga di commettere un errore relativo sul dato in entrata pari a 10^{-6} . Stimare l'errore sul dato in uscita.

Traccia 5. [Punteggio: 7]

Si scriva una function Scilab (Matlab) che abbia:

INPUT: A , matrice quadrata;

OUTPUT: B , matrice quadrata ottenuta da A mediante una permutazione delle sue colonne così definita: la prima colonna di B coincide con la colonna di A che contiene il maggior numero di zeri; tra le $n - 1$ colonne rimanenti di A si seleziona quella che contiene il maggior numero di zeri e la si pone come seconda colonna di B , e così via per la terza, quarta, ..., n -esima colonna di B .

ESEMPI:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 9 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$