**CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA**
**CALCOLO NUMERICO**
**Secondo esonero - 07 Giugno 2013 -**

**Traccia 1.**[1] [Punti: 1.a: 2; 1.b: 2; 1.c:2]

Sia dato il sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

(1.a) Determinarne l'insieme delle soluzioni.

(1.b) Indicare una ulteriore equazione che, aggiunta nel sistema, non ne modifichi l'insieme delle soluzioni.

(1.c) Indicare una ulteriore equazione che, aggiunta nel sistema, lo renda incompatibile.

**Traccia 2.** [Punti: 2.a: 3; 2.b: 3; 2.c: 3; 2.d: 3]

Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \alpha + 2 \\ \alpha + 1 \\ 3 \\ 2\alpha \end{pmatrix},$$

dove $\alpha$ è un parametro reale. Sia $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_i$, $i = 1, 2, 3$. Risolvere i seguenti quesiti.

(2.a) Determinare gli eventuali valori del parametro $\alpha$ tali che $b \in V$.

(2.b) Determinare gli eventuali valori del parametro $\alpha$ tali che $b \in V^\perp$.

(2.c) Determinare gli eventuali valori del parametro $\alpha$ tali che $b$ dipenda linearmente da $v_1$ e $v_2$.[2]

(2.d) Si consideri il problema dei minimi quadrati associato al sistema lineare $Ax = b$, essendo $A = [v_1, v_2, v_3]$ e se ne denoti con $x^*$ la sua soluzione. Determinare i valori di $\alpha$ tali che:

- $x^* = 0$;
- il residuo $r^* \equiv b - Ax^*$ sia nullo.

Per rispondere al quesito (2.d) non è necessario risolvere esplicitamente il problema dei minimi quadrati. In tal caso, aggiungere le motivazioni.

[1] Tratta da una traccia della prova scritta del concorso a cattedra in Matematica per la scuola secondaria superiore (anno 2012).

[2] Cioè, $v_1, v_2, b$ siano vettori linearmente dipendenti.

**Traccia 3.** [Punti: 3.a: 1; 3.b: 1; 3.c: 1; parte restante: 4]

Sia $V$ uno spazio vettoriale reale. Riportare le seguenti definizioni:

(3.a) sistema di generatori di $V$;

(3.b) base di $V$.

(3.c) dimensione di $V$.

Siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dimostrare l' equivalenza delle seguenti proposizioni:

(a) $v_1, v_2, \dots, v_n$ costituiscono una base di $V$;

(b) $\forall x \in V, \exists | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.c. $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

**Traccia 4.** (Scilab) [Punti 7]

Scrivere una funzione Scilab che implementi l'algoritmo di eliminazione di Gauss che effettui scambi di righe <u>solo</u> nel caso si incontri un elemento pivotale nullo. La funzione dovrà avere:

- INPUT: una matrice quadrata $A$ e un vettore colonna $b$;
- OUTPUT: Una matrice triangolare superiore $U$ e un vettore colonna $c$ tali che il sistema $Ux = c$ sia equivalente al sistema $Ax = b$.

**CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA**
**CALCOLO NUMERICO**
**Secondo esonero - 13 Gennaio 2014 -**

**Traccia 1.** [Punti: 1.a: 3; 1.b: 3; 1.c: 3; 1.d: 3]

Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Risolvere i seguenti quesiti.

(1.a) Dire se i vettori $v_1$, $v_2$, $v_3$ sono linearmente indipendenti o dipendenti.

(1.b) Posto $A = [v_1, v_2, v_3]$, dire, motivando la risposta, se il problema dei minimi quadrati $Ax = b$ ammette un'unica soluzione $x^*$ e, in tal caso, determinarla.

(1.c) Posto $V = \text{Im}(A)$, scomporre il vettore $b$ nella somma di due vettori: $b = b_1 + b_2$, con $b_1 \in V$ e $b_2 \in V^\perp$.

(1.d) Il vettore $b_1$ ottenuto al punto precedente, appartiene a $\text{span}\{v_1, v_2\}$, $\text{span}\{v_1, v_3\}$, $\text{span}\{v_2, v_3\}$, o a nessuno dei precedenti? Motivare la risposta.

**Traccia 2.** [Punti: 6] Sia $S$ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Definire $S^\perp$, il sottospazio ortogonale di $S$ e descrivere un metodo per calcolarne una base, aiutandosi con un esempio concreto in cui vengono discussi i vari passaggi.

**Traccia 3.** [Punti: 3.a: 2; 3.b: 2; 3.c: 2]

(3.a) Si scriva il polinomio $p(x)$ che interpola la funzione $f(x) = e^x$ nei nodi

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

(3.b) Si determini una maggiorazione dell'errore $\max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - p(x)|$.

(3.c) Utilizzando i risultati ottenuti nei punti precedenti, determinare il polinomio $q(x)$ che interpola la funzione $g(x) = e^x + x^2 - 1$ negli stessi nodi $x_0, x_1$ e $x_2$ e la relativa maggiorazione dell' errore. Motivare tutte le risposte.

**Traccia 4.** (Scilab) [Punti 6]

Scrivere una funzione Scilab che implementi il metodo delle potenze con tecnica di normalizzazione. La funzione dovrà avere:

- INPUT: una matrice quadrata $A$, una precisione *tol* e un numero massimo di iterate consentite *itmax*;
- OUTPUT: l'autovalore dominante *lam* e il corrispondente autovettore $x$.

Qual è l'utilità principale di considerare un numero massimo di iterazioni?

**CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA**
**CALCOLO NUMERICO**
**Secondo esonero - 13 Gennaio 2015 -**

**Traccia 1.** [Punti: 1.a: 3; 1.b: 3; 1.c: 3; 1.d: 3]

Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},$$

Risolvere i seguenti quesiti.

(1.a) Determinare numero $s$ di vettori linearmente indipendenti, tra quelli sopra elencati. Più in particolare, estrarre un sottoinsieme di $s$ vettori linearmente indipendenti dall'insieme $\{v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4\}$.

(1.b) Posto $A = [v_1, v_2, v_3, v_4]$, sfruttando il risultato del punto precedente, determinare una base del sottospazio $V = \mathrm{Im}(A)$.

(1.c) Determinare una base di $V^\perp$.

(1.d) Scomporre il vettore $b = [0,\, 6,\, 0]^\top$ come somma $b = b_1 + b_2$, con $b_1 \in V$ e $b_2 \in V^\perp$.

**Traccia 2.** [Punti: 6] Definire le matrici elementari di Gauss e discuterne le principali proprietà.

**Traccia 3.** [Punti: 3.a: 2; 3.b: 2; 3.c: 2]

(3.a) Si determini il polinomio $p(x)$ di secondo grado che interpola la funzione $f(x) = x^4 - 1$ nei nodi

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

(3.b) Si determini una maggiorazione dell'errore $\max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - p(x)|$.

(3.c) Utilizzando i risultati ottenuti nei punti precedenti, determinare il polinomio $q(x)$ che interpola la funzione $g(x) = e^x + x^2 - 1$ negli stessi nodi $x_0, x_1$ e $x_2$ e la relativa maggiorazione dell' errore. Motivare tutte le risposte.

**Traccia 4.** (Scilab) [Punti 6]

Scrivere una funzione Scilab che implementi l'algoritmo di Gauss con tecnica del massimo pivot parziale. La funzione dovrà avere:

- INPUT: una matrice quadrata $A$ (matrice dei coefficienti), un vettore $b$ (vettore dei termini noti);
- OUTPUT: La soluzione $x$ del sistema lineare $Ax = b$.

**CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA**
**CALCOLO NUMERICO**
**Secondo esonero - 8 Giugno 2012 -**

**Traccia 1.** [Punteggio: 1.a:3; 1.b:3; 1.c:3; 1.d:3]

Si consideri la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -9 & -1 & -4 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvere i seguenti quesiti.

(1.a) Ridurre a scalini la matrice $C$ e determinarne il rango.

(1.b) Per $k = 1, 2, 3, 4$, si denoti con $b_k$ la $k$-esima colonna di $C$ e con $A_k$ la matrice quadrata di dimensione 3 ottenuta da $C$ eliminandone la colonna $b_k$.

Sfruttando il risultato del punto precedente, dedurre i valori dell'indice $k$ in corrispondenza dei quali il sistema lineare $A_k x = b_k$ risulta compatibile.

Le soluzioni dei sistemi compatibili sono linearmente dipendenti o indipendenti?

(OSSERVAZIONE. Per rispondere non occorre calcolare esplicitamente le soluzioni).

(1.c) Sia $b = [1, 1, 1, 1]^T$. Determinare la soluzione del problema dei minimi quadrati definito dal sistema sovradimensionato $C^T x = b$.

(1.d) Sfruttando il risultato ottenuto al punto precedente, decomporre il vettore $b$ nella somma di due vettori $b_1$ e $b_2$, con $b_1 \in \mathrm{Im}(C^T)$ e $b_2 \in (\mathrm{Im}(C^T))^\perp$.

(SUGGERIMENTO. Poiché $b_1$ è combinazione lineare delle colonne di $C^T$, il sistema $C^T x = b_1$ ammetterà unica soluzione. Premoltiplicare ambo i membri del sistema per $C$ e osservare che $C * b_1 = C * b$ (spiegare il perché). A questo punto è possibile procedere sfruttando quanto fatto al punto precedente.

**Traccia 2.** [Punteggio. 2.a:4; 2.b:4] Si consideri la funzione

$$f(x) = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1 + x^2).$$

(2.a) Determinare il polinomio $p_1(x)$ che interpola $f(x)$ nei nodi $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

(2.b) Determinare una maggiorazione dell'errore $|R(x)| = |f(x) - p_1(x)|$ nell'intervallo $[0, 1]$.

**Traccia 3.** [Punteggio: 6]

Descrivere il metodo delle potenze per l'approssimazione dell'autovalore e dell'autovettore dominante di una matrice.

**Traccia 4.** [Punteggio: 6]

Scrivere una function Scilab (Matlab) che abbia in input

- $A$, matrice quadrata che ammette autovalore dominante,
- $tol$, precisione richiesta,

e in output

- *lambda*, approssimazione dell'autovalore dominante ottenuta mediante il metodo delle potenze.

Indicando con $\sigma_k$ la successione definita dal metodo delle potenze, si usi il seguente criterio di arresto

$$|\sigma_k - \sigma_{k-1}| < tol.$$

**CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA**
**CALCOLO NUMERICO**
**Secondo esonero - 16 Giugno 2011 -**

**Traccia 1.** [Punteggio: 7]

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 & = & -1 \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 - x_4 & = & -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + (2-\alpha)x_4 & = & 2 \end{cases}$$

dove $\alpha$ è un parametro reale. Dire per quali valori di $\alpha$ il sistema risulta compatibile e, in questo caso, determinarne l'insieme delle soluzioni.

**Traccia 2.** [Punteggio: 7] Definire la somma diretta di due spazi vettoriali $V$ e $W$ e dimostrare la seguente equivalenza:

(a) $\mathbb{R}^n = V \oplus W$

(b) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \exists | \mathbf{v} \in V,\ \exists | \mathbf{w} \in W\ t.c.\ \ \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$

Infine dimostrare che, se $V$ è un qualsiasi sottospazio di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbb{R}^n = V \oplus V^{\perp}$.

**Traccia 3.** [Punteggio: 10]

Si considerino la matrice $A$ e il vettore $\mathbf{x}$ così definiti

$$A \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con riferimento alla traccia precedente, determinare i vettori $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(A)$ e $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(A)^{\perp}$ tali che $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

**Traccia 4.** [Punteggio: 8]

Scrivere una function Scilab (Matlab) che abbia in input due vettori della stessa lunghezza $x$ (vettore delle ascisse), $y$ (vettore delle ordinate), e infine uno scalare $z$, e in output il valore che il polinomio interpolante i punti $(x_i, y_i)$ assume in $z$. A tal fine, è possibile fare uso della base delle potenze o di quella di Lagrange.