

Perché il Calcolo Numerico?

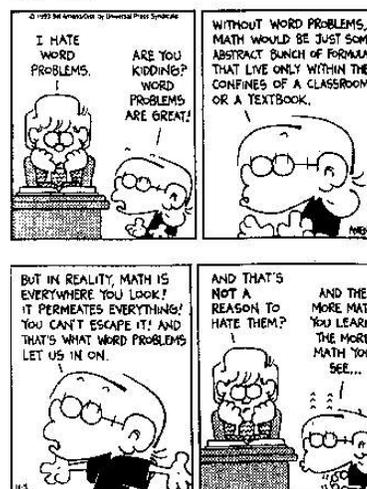
Felice Iavernaro*

Le principali motivazioni per un approccio numerico ai problemi della matematica sono:

- il fatto che la maggior parte dei problemi matematici (anche relativamente semplici) non sono risolvibili analiticamente¹, ovvero non esistono tecniche che permettano di esprimerne la soluzione come combinazione finita di funzioni elementari note (soluzione non esprimibile in forma chiusa);²

- gran parte dei problemi matematici che provengono dalle diverse branche applicative delle discipline scientifiche e dal mondo dell'industria hanno *grandi dimensioni*, cioè coinvolgono un numero elevato di incognite. Anche qualora detti problemi fossero risolvibili elementarmente,

Fox Trot



*Dipartimento di Matematica, Università di Bari, Via Orabona 4, I-70125 Bari (Italy), felix@dm.uniba.it, <http://www.dm.uniba.it/~iavernaro>

¹o elementarmente.

²Alcuni esempi:

- risolvere l'equazione $x = \cos(x)$;
- calcolare l'integrale $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

il tempo richiesto per determinarne la soluzione sarebbe troppo elevato.

- in molte applicazioni è frequente la necessità di risolvere problemi in tempo reale (ovvero in tempi ridottissimi).

La maggior parte dei problemi³, soprattutto quelli che provengono dalle applicazioni *real-life*, ricadono in una o più delle classi sopra elencate. Il *Calcolo Numerico*, e più in generale l'*Analisi Numerica*, studia la possibilità di poter approssimare le soluzioni di detti problemi, in maniera *efficiente* sul calcolatore. La potenza di calcolo fornita dai moderni calcolatori⁴ permette, in effetti, di risolvere problemi di grandi dimensioni in tempi relativamente ridotti.

Tuttavia, a fronte di una potenza di calcolo molto elevata, il calcolatore, disponendo di memoria finita, implementa un'aritmetica differente da quella reale. L'*aritmetica di macchina* ha, per natura, due svantaggi:

- (a) può rappresentare solo un numero finito di numeri reali, i cosiddetti *numeri di macchina*; tutti i restanti numeri, se non troppo piccoli nè troppo grandi, verranno appropriatamente approssimati mediante i numeri di macchina. L'errore di rappresentazione che ne deriva, dipende dalla macchina e dal software utilizzati: ad esempio in Matlab è circa $2 \cdot 10^{-16}$;
- (b) le quattro operazioni elementari, $+$, $-$, $*$, $/$, non sono (in generale) eseguite correttamente, anche se l'errore che esse introducono è dello stesso ordine dell'errore di rappresentazione.

Il calcolatore può essere quindi inteso come uno strumento di calcolo dotato di una sua propria precisione che non può essere superata. Come conseguenza, in alcuni casi il risultato che esso ci restituisce, in seguito all'esecuzione di un programma che implementa un dato algoritmo, potrebbe essere del tutto erroneo, pur essendo il problema e l'algoritmo risolutivo impostati correttamente. Ciò accade in una delle seguenti situazioni:

- (1) quando il problema matematico è *mal condizionato*, cioè quando le soluzioni del problema (dati di input) dipendono in modo sensibile dai dati iniziali (dati di output): ciò significa che a piccole perturbazioni dei dati di input possono corrispondere grosse variazioni sulla soluzione. In effetti il

³praticamente tutti quelli che non si trovano nei testi scolastici.

⁴gli attuali processori presenti in commercio hanno una potenza di calcolo superiore a 1Gflops/s (10^9 operazioni elementari al secondo).

calcolatore introduce piccole perturbazioni dei dati di input proprio quando questi vengono rappresentati mediante numeri di macchina (appunto gli errori di rappresentazione).

(2) quando l'algoritmo costruito per la risoluzione del problema risulta *instabile*: ciò si verifica quando la sequenza delle singole operazioni elementari che definiscono l'algoritmo è tale da amplificare notevolmente i piccoli errori dovuti al fatto che dette operazioni non sono effettuate correttamente.



Per uno stesso problema possono esistere più tecniche risolutive le quali definiscono altrettanti algoritmi suscettibili di implementazione al calcolatore. Un confronto tra due o più metodi dovrà, in generale, tener conto dei seguenti fattori:

- *classe di problemi a cui il metodo è applicabile*: alcuni metodi possono, in effetti, richiedere ipotesi di lavoro più restrittive rispetto ad altri;
- *costo computazionale*: indica la quantità di operazioni che l'algoritmo richiede mediamente per fornire il risultato; esso è chiaramente proporzionale al tempo di esecuzione ma, al contrario di quest'ultimo, è indipendente dalla macchina utilizzata;
- *stabilità*: un algoritmo non sufficientemente stabile può generare errori significativi che ne rendono l'impiego inaccettabile.