BREVE CRONISTORIA DEL METODO DI NEWTON

Felice Iavernaro, Alessandro Rosa

Il metodo di Newton approssima, per via iterativa, il valore delle soluzioni di una equazione data. Quale soluzione da approssimare dipende dalla posizione del valore iniziale scelto.
Il metodo è espresso dalla seguente formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

dove x_n e x_{n+1} sono i due valori in entrata ed in uscita rispettivamente, durante ogni iterazione.

L'algoritmo si arresta quando $| x_{n+1} - x_n | < a$, dove a, $0 < | a | < 1$, indica l'accuratezza del valore della soluzione desiderata.

Benché la paternità del metodo sia stata imputata (forse per l'impiego della derivata) a Isaac Newton (1642-1727), non c'è traccia di questo algoritmo iterativo nei suoi scritti. Newton ne anticipò solamente una formula somigliante.
L'idea principale (l'iterazione) é presente già negli antichi scritti Babilonesi.

Il metodo è anche conosciuto come di Newton-Raphson o di Newton-Fourier, perché fu ampliamente sviluppato ed esplicitamente formulato, indipendentemente, dai due matematici Joseph Raphson (1648-1715) e Joseph Fourier (1768-1830), da cui giunse la formula odierna.

La sua grande importanza strategica risiede nella soluzione di ampie classi di equazioni, il cui grado è superiore a 4 o di tipo trascendente senza possibilità di riduzione in forma algebrica.

Il giovanissimo e grande matematico francese Evariste Galois (1811-1832) dimostrò che non esistono formule globali per le equazioni il cui grado è superiore a 4, ponendo fine a secoli di tentativi di risoluzione algebrica da parte di tanti eminenti matematici europei.

Inizialmente il comportamento del metodo di Newton fu studiato solo nel campo dei numeri reali, $x \in \mathbb{R}$. Solo nella seconda metà del XIXth secolo, le ricerche correlate al metodo investirono anche i numeri complessi, $z \in \mathbb{C}$, secondo il *trend* di quel periodo che vedeva, nell'estensione dei problemi classici a questo più grande campo numerico, l'approccio più assolutamente completo ed la soluzione più esaustiva. E' proprio in questo nuovo contesto inizia la fase più interessante della storia del metodo di Newton.

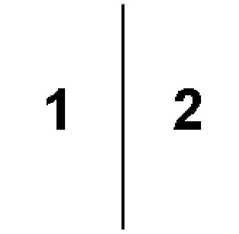
Ernst Schröder (1841-1902) ed Arthur Cayley (1821-1895) studiarono il metodo di Newton nel campo dei complessi, il primo dimostrando l'esistenza di infiniti metodi iterativi per risolvere le equazioni (approccio algebrico), il secondo studiando la distribuzione dei valori iniziali associati alle distinte radici dell'equazione data (approccio geometrico).
Quest'ultimo aspetto è il più affascinante.

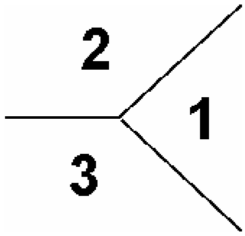
La generazione delle sottoregioni, di tutti i valori iniziali associati all'approssimazione di una ed una sola radice dell'equazione data (il bacino di attrazione), assume, nel campo dei Complessi, nuove caratteristiche più interessanti rispetto all'applicazione nei Reali.

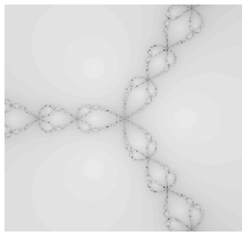
Cayley affrontò la determinazione della distribuzione dei valori iniziali per l'approssimazione delle radici dell' equazione complessa $z^n - 1 = 0$, per i due casi $n = 2$ o $n = 3$.

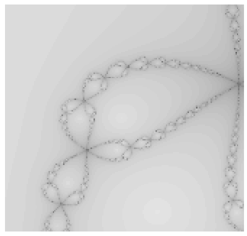
Nel caso quadratico, Cayley riuscì a prevederne la corretta distribuzione geometrica dei valori in due semipiani. Ma, nel caso cubico, Cayley si imbatté in una distribuzione che rifuggiva la regolarità del caso precedente. Egli, ispirato, dal successo ottenuto nel caso cubico, teorizzò che lo stesso criterio distributivo, per $n = 2$, potesse essere indistintamente applicato anche a tutti gli atri casi di equazioni di ordine superiore, $n > 3$. Ma, con grande meraviglia, Cayley notò la distribuzione caotica dei valori iniziali in un intorno della curva frontiera tra coppia qualsiasi di bacini di attrazione, impossibile da prevedere per via sperimentale.

PREVISIONE DI CAYLEY **DISTRIBUZIONE EFFETTIVA**









Zoom della frontiera.

Il problema della determinazione delle frontiere assunse grande portata ed, di riflesso, il metodo di Newton nuovi, importanti connotati geometrici e, soprattutto, topologici. L'esistenza di una curva (la frontiera tra i bacini di attrazione) con infiniti punti fissi si scontrava con le contemporanee idee geometriche. La scoperta di nuove entità geometriche, apparentemente paradossali; non mancò di causare perplessità: lo stesso Henri Poincaré (1854-1912), che diede contributi nuovi, fondamentali nello studio delle equazioni differenziali, geometria, topologia, astronomia, fisica, appellò le curve generate da funzioni continue, ma non differenziabili (la funzione di Weierstrass, per esempio), come 'mostri geometrici'.

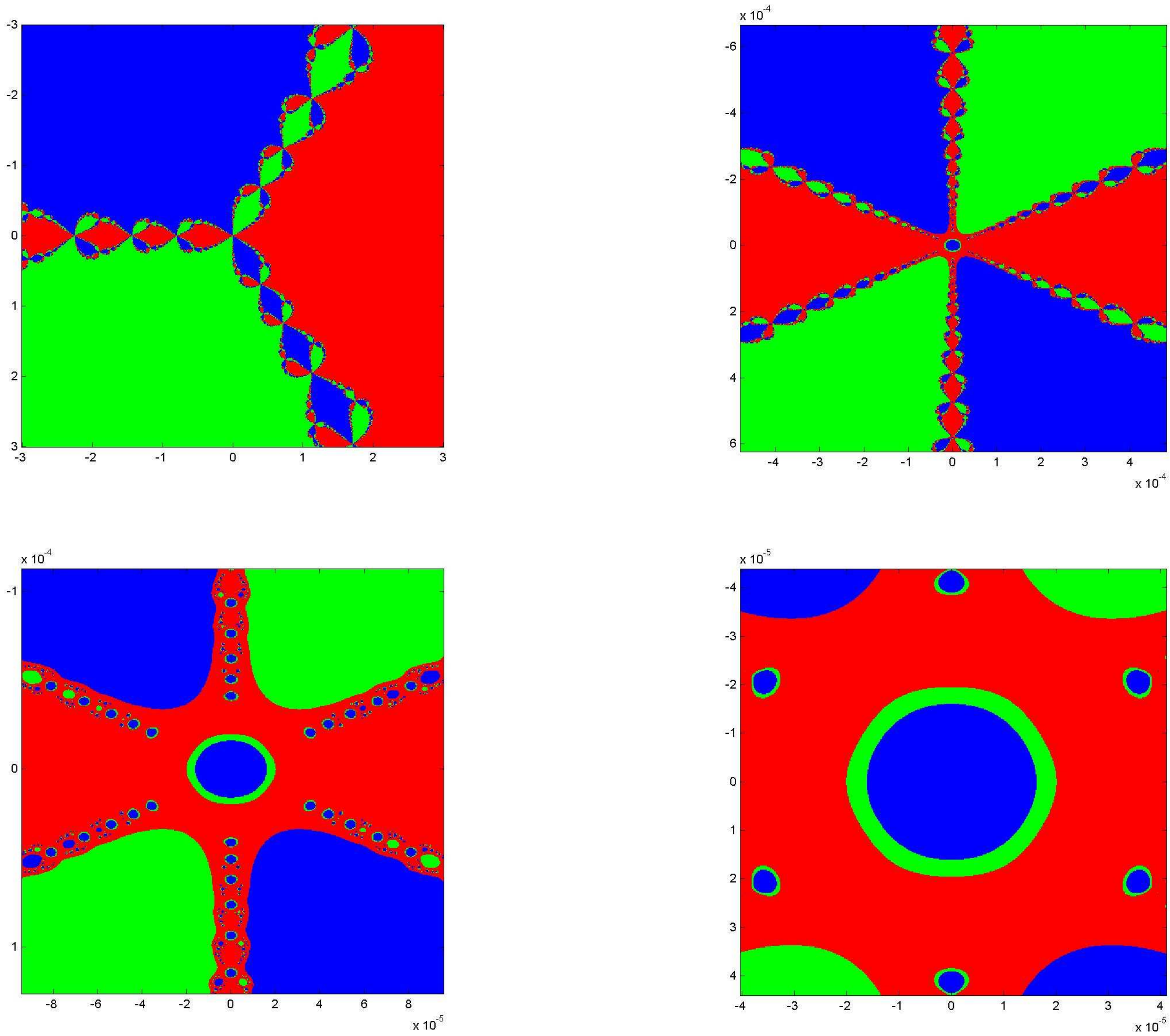
Gabriel Koenigs (1858-1931) fece entrare di diritto la questione sollevata da Arthur Cayley (Il problema di Cayley) nel nuovo campo di studio delle dinamiche di una funzione olomorfa complessa (dinamiche complesse), cioè la determinazione dei bacini di attrazione (e quindi anche la natura delle curve frontiere) generate dall'iterazione della funzione stessa. Nei suoi primi anni la questione fu esaminata dal punto di vista locale esclusivamente, benché lo stesso Koenigs manifestò subito l'intenzione di risolvere il problema globalmente, estendendo il dominio di ricerca su tutta la sfera di Riemann.

Il problema di Cayley, manifestazione della più ampia questione legata alle dinamiche complesse, tenne in scacco i matematici europei per più di 30 anni, sino al 1918, quando divenne uno dei temi fondamentali del Grand Prix des Mathématiques, uno dei più prestigiosi concorsi matematici francesi. Il premio fu vinto ufficialmente da Gaston Julia (1893-1978), il quale, con una formidabilissima tesi, contribuì fortemente a comprendere il problema globale delle dinamiche complesse. E i nuovi risultati aiutarono Julia a risolvere anche il problema di Cayley. Il verdetto della commissione esaminatrice non fu scevro da commenti e Julia ebbe, durante la valutazione dei lavori, accesi scontri con Pierre Fatou (1878-1929) per la priorità ufficiale dei risultati, giacché anche Fatou aveva lavorato sull'argomento e, per coincidenza, ottenenne gli stessi successi.

Le curve frontiere dei bacini di attrazione furono chiamati 'insiemi di Julia', in onore del grande matematico che ne dedusse le proprietà analitiche, geometriche e topologiche.

Attualmente, il metodo di Newton é oggetto di studio secondo un approccio numerico, investigando su quali parametri intervengono nella determinazione della forma delle curve di frontiera.

I risultati più recenti si traducono in nuove varianti del metodo di Newton, ove le curve frontiere assumono forme più regolari, semplici ed, per dare un'idea, analoghe agli esempi auspicati invano da Cayley.



Successivi ingrandimenti del frattale che si ottiene applicando il Metodo di Newton alla funzione complessa $z^3-1=0$. Poiché il frattale e' generato in aritmetica finita, cioè su un insieme finito di numeri (numeri di macchina), sul calcolatore la natura frattale dell'oggetto viene perduta da un certo punto in poi (plot 3 4 e 5).